

Anna Szpila
(Uniwersytet Rzeszowski)

Funkcje gwiazdziste względem szczególnego układu punktów

Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną i $\eta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Przez S_{mS}^* oznaczmy podklasę funkcji analitycznych f spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \frac{mzf'(z)}{\sum_{k=0}^{m-1} \eta^{-k} f(\eta^k z)} > 0 \text{ dla } z \in U.$$

Funkcje z tej klasy nazywamy gwiazdzistymi względem m punktów symetrycznych.

Można zapisać, że dla $f \in S_{mS}^*$ istnieje $p \in P$ taka, że

$$f'(z) = p(z) \exp q(z),$$

gdzie

$$q(z) = \int_0^z \frac{\sum_{k=0}^{m-1} p(\eta^k \zeta) - m}{m\zeta} d\zeta.$$

Jeżeli funkcję p wyrazimy za pomocą wzoru Hergloza jako

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

przy czym μ jest miarą probabilistyczną na przedziale $[0, 2\pi]$, to funkcja q jest postaci

$$q(z) = \frac{2}{m} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - e^{-mti} z^m} d\mu(t).$$

Wykorzystując metodę wariacyjną Gołuzina, można znaleźć minimum $|f'(z)|$, gdzie $z \in U$ jest ustalone i $f \in S_{mS}^*$ przy m parzystym oraz skonstruować funkcję ekstremalną.