

Jan Stankiewicz

(Politechnika Rzeszowska, Uniwersytet Rzeszowski)

Podporządkowanie i pewne jego uogólnienia w teorii funkcji zespolonych

Niech $K = \{z : |z| < 1\}$ oznacza koło jednostkowe i niech Ω oznacza klasę funkcji Schwarza spełniających warunki: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ dla $z \in K$. Niech Φ oznacza klasę funkcji ograniczonych, $|\phi(z)| \leq 1$ dla $z \in K$.

Mówimy, że funkcja f jest podporządkowana w kole K funkcji F i piszemy $f \prec F$, jeżeli istnieje funkcja $\omega \in \Omega$ taka, że $f(z) = F(\omega(z))$. Mówimy też, że funkcja f jest zmajoryzowana (podporządkowana modułowo) przez funkcję F i piszemy $f \ll F$, jeżeli istnieje funkcja $\phi \in \Phi$ taka, że $f(z) = \phi(z)F(z)$, $z \in K$.

Wykorzystując podporządkowanie możemy zdefiniować różne klasy funkcji regularnych w K . Na przykład: f jest funkcją gwiazdzystą (wypukłą) w K , jeżeli $f(0) = 0$ oraz

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z} \quad \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}\right).$$

Pojęcie podporządkowania można uogólnić (M.S. Robertson 1970 [3], J. Stankiewicz 1977 [4], J. Krzyż i J. Stankiewicz 1977 [2]) wprowadzając pojęcia quasipodporządkowania $f \prec_q F$ oraz quasimajoryzacji $f \ll_q F$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} f \prec_q F &\iff \exists g \ f \prec g \wedge g \ll F, \\ f \ll_q F &\iff \exists h \ f \ll h \wedge h \prec F. \end{aligned}$$

W wielu twierdzeniach z teorii funkcji zespolonych możemy w założeniach twierdzeń podporządkowanie $f \prec F$ zastąpić quasipodporządkowaniem $f \prec_q F$ lub quasimajoryzacją $f \ll_q F$, nie zmieniając też w tych twierdzeniach. Uzyskujemy wtedy "mocniejsze" rezultaty.

Problemem otwartym jest badanie różnych klas funkcji, przy definicji których podporządkowanie zastąpimy quasipodporządkowaniem lub quasimajoryzacją.

Ciekawym zagadnieniem jest badanie takich klas funkcji definiowanych przez podporządkowanie, w których funkcję jednolistną $\frac{1+z}{1-z}$ zastępujemy funkcją wielolistną $\frac{1+z^n}{1-z^n}$, $n \geq 2$. Częściowe rezultaty uzyskano w pracach R. Jurasieńskiej i J. Stankiewicza [1].

Bibliografia:

- [1] Jurasieńska R., Stankiewicz J., Special subclasses of Caratheodory functions and their applications, Folia Sci. Univ. Techn. Resoviensis 85, Mat.10(1991), 37-45.
- [2] Krzyż J., Stankiewicz J., Quasisubordination and quasimajorization, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 31(1977), 71-74.
- [3] Robertson M.S., Quasisubordination and coefficient conjectures, Bull. Amer. Math. Soc., 76(1970), 1-9.
- [4] Stankiewicz J., Quasisubordination and quasimajorization of analytic functions, Ann.