

Wiesław Majchrzak
(Politechnika Łódzka)

O kompaktyfikacji pewnej rodziny odwzorowań harmonicznych jednolistnych

Niech $\Omega_\alpha := q_\alpha(\Delta)$; gdzie $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, zaś $q_\alpha(z) = (z - Az^2)/(1 - Bz^2)$, $A = e^{2i\alpha} \cos \alpha$, $B = e^{i\alpha}$, $\alpha \in (0, \pi)$. Wiadomo, że Ω_α jest płaszczyzną z usuniętą półprostą równoległą do i-osi, przy czym koniec tej półprostej $s_0 = q_\alpha(e^{-3i\alpha})$.

Rozważmy rodzinę $S_H(\Delta, \Omega_\alpha)$ odwzorowań $f: \Delta \rightarrow \Omega_\alpha = f(\Delta)$ harmonicznych jednolistnych zachowujących orientację i takich, że $f(0) = f'_i(0) - 1 = 0$. Wiadomo, że $S_H(\Delta, \Omega_\alpha)$ nie jest zwarta względem topologii niemal jednostajnej zbieżności na Δ . W celu kompaktyfikacji tej klasy tworzymy zwartą, wypukłą klasę $F(\alpha)$ funkcji $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ postaci

$$(1) \quad f(z) = \operatorname{Re} q_\alpha(z) + i \operatorname{Im} \int_0^z q'_\alpha(\zeta) p(\zeta) d\zeta,$$

dla dowolnych holomorficzych funkcji p takich, że $\operatorname{Re} p > 0$ w Δ , $p(0) = 1$. Punkty ekstremalne f_η w $F(\alpha)$ są postaci (1), gdzie $p(z) = (1 + \eta z)/(1 - \eta z)$, $|\eta| = 1$. Dowodzi się, że $S_H(\Delta, \Omega_\alpha) \subset F(\alpha)$, przy czym $\overline{S_H(\Delta, \Omega_\alpha)} \neq F(\alpha)$.

W wyniku badania wartości brzegowych punktów ekstremalnych f_η otrzymujemy, że $\overline{S_H(\Delta, \Omega_{\pi/2})} = S_H(\Delta, \Omega_{\pi/2}) \cup \operatorname{co}\{f_\eta \in \operatorname{Ext} F(\alpha)\}$, gdzie $\eta \in \partial\Delta$ są jednoznacznie określone.

Ponadto stwierdzamy, że punkt ekstremalny $f_{\eta_0} \in F(\alpha)$, gdzie $\eta_0 = \overline{q_\alpha^{-1}(s_0)}$, $\alpha = \pi/2$, wyznacza półprostą równoległą do i-osi rozłączną z $f(\Delta)$ dla dowolnych $f \in F(\pi/2)$.