

Zbigniew Jakubowski
(Uniwersytet Łódzki)

Kilka refleksji dotyczących funkcji jednolistnych ograniczonych

Niech C oznacza płaszczyznę otwartą, $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, S - klasę funkcji F postaci $F(z) = z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots$, holomorficznym i jednolistnym w kole Δ . Jak wiadomo różnorodnie badania własności funkcji F klasy S zapoczątkowane zostały przez P. Koebe'go (1907-1909). Badania te stanowiły i nadal stanowią ważny dział analizy zespolonej.

G. Pick (1917) wprowadził podklasę $S(M)$, $M > 1$, rodziny S funkcji spełniających w kole Δ warunek $|F(z)| < M$. W klasie tej otrzymał oszacowanie $|A_2| \leq 2(1 - M^{-1})$, wyznaczył ekstrema funkcjonalu $|F(z)|$, $z \neq 0$, $z \in \Delta$ oraz tzw. stałą Koebe'go: $\kappa_{S(M)} = M(2M - 1 - 2\sqrt{M^2 - M})$. We wszystkich tych przypadkach funkcją ekstremalną okazała się funkcja $w = P(z; M)$, $z \in \Delta$, $M > 1$, spełniająca równanie $w(1 - \frac{w}{M})^{-2} = z(1 - z)^{-2}$, $P(0; M) = 0$ lub ogólniej funkcja $\bar{P}(\varepsilon; M)$, $|\varepsilon| = 1$ (zwana funkcją Picka).

Okazało się, że wiele zagadnień, które rozważano w klasie S można także rozstrzygnąć w klasie $S(M)$. Jednak pewne zagadnienia np. problem współczynników „stawiają dużo większy opór” niż w pełnej rodzinie S . Wbrew opiniom części matematyków przyjęcie dodatkowego warunku wspólnej ograniczoności funkcji nie ułatwia rozważań.

Wiadomo, że badaniem własności odwzorowań z klasy $S(M)$ zajmowano się w licznych ośrodkach krajowych i zagranicznych. W szczególności w Łodzi zapoczątkował je profesor Zygmunt Charzyński, a następnie rozwijał przy współpracy z profesorem Witoldem Janowskim i ich uczniami. Celem referatu jest przypomnienie różnych interesujących rezultatów, stosowanych metod badawczych, a także zadań, które nadal oczekują na rozwiązanie. Materiały uzupełniające znaleźć można np. w pozycjach [1-6].

1. Z. Charzyński, Wspomnienia i refleksje (2.04.1984), Soc. Sci. Lodziensis 41 (9) (1987), 1-19.
2. Z.J. Jakubowski, Witold Janowski (1912-1972), Wiad. Matem. 19 (1975), 44-49.
3. Z.J. Jakubowski, Wybrane zagadnienia teorii funkcji jednolistnych z uwzględnieniem wyników matematyków łódzkich, Z.N. AGH 1522, Opuscula Math. 13(1993), 165-177.
4. Z.J. Jakubowski, On some conjectures concerning bounded univalent functions, Ann. UMCS, Sec. A 54 (4) (2000), 45-52.
5. J. Żładowska-Zahorska, Professor Z. Charzyński's contribution to the theory of mappings, Bull. Soc. Sci. et de Lettres de Łódź 36 (21) (1986), 1-16.