

Franciszek Bogowski, Andrzej Wesołowski
(UMCS Lublin)

Konstrukcja pewnego przedłużenia quasi-konforemnej funkcji określonych w kole jednostkowym na płaszczyznę domkniętą

Niech C - płaszczyzna zespolona, $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ - koło jednostkowe otwarte.

W pracy podana jest pewna metoda konstruowania przedłużenia quasi-konforemnej funkcji określonych w $\overline{D} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$ na płaszczyznę domkniętą $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$. Główny wynik zawarty jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1. Niech f i g będą funkcjami holomorficznymi i lokalnie jednolistnymi w $\overline{D}$ oraz istnieje funkcja h holomorficzna w $\overline{D}$ taka, że dla pewnego ustalonego $k \in (0; 1)$ i dowolnego $\alpha \in C$ zachodzi nierówność:

$$\left| \frac{h(z)-1}{h(z)} |z|^2 - (1-|z|^2) \left[\frac{zh'(z)}{h(z)} + (1-2\alpha) \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 2\alpha \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right] - \right. \\ \left. - \alpha(1-|z|^2)^2 \frac{z}{2} h(z) \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{g''(z)}{g'(z)} \right)^2 + (S_f(z) - S_g(z)) \right] \right| \leq k,$$

gdzie $\left| \frac{1}{h(z)} - 1 \right| \leq k$, oraz $S_f = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$, $z \in \overline{D}$, oznacza pochodną Schwarza funkcji holomorficzej f .

Wówczas istnieje funkcja F określona na $\overline{C}$ taka, że $F|_{\overline{D}} = f$ i F odwzorowuje quasi-konforemnie rzędu $\frac{1+k}{1-k}$ $\overline{C}$ na $\overline{C}$.

Funkcja ta ma postać:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{for } |z| \leq 1, \\ f\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{(z-\frac{1}{z})h(\frac{1}{z})f'(\frac{1}{z})}{1+\alpha(z-\frac{1}{z})h(\frac{1}{z})\left(\frac{g''(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} - \frac{f''(\frac{1}{z})}{f'(\frac{1}{z})}\right)} & \text{for } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

W szczególnych przypadkach otrzymuje się zarówno wcześniej znane rezultaty ([1], [2], [3], [4]) jak i rezultaty nowe.

- [1] Ahlfors, L. V., Sufficient conditions for quasiconformal extension, Princeton Annals of Mat. 79(1974), 23-29.
- [2] Ahlfors, L. V., Weill, G., A uniqueness theorem for Beltrami equation, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 975-978.
- [3] Becker, J., Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, J. Reine Angew. Math. 255 (1972), 23-43.
- [4] Wesołowski, A., Wybrane zagadnienia p -listności i quasi-konforemnego rozszerzenia funkcji meromorficznych w obszarach kołowych, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej 1990.