

Jakow Baris, Piotr Baris.

(Uniwersytet Warmiński - Mazurski w Olsztynie)

Układy kwadratowe równań różniczkowych

Układy kwadratowe równań różniczkowych (UK) wzbudzają zainteresowanie ponieważ są najprostszymi nieliniowymi układami równań różniczkowych. Mają one duże zastosowanie w badaniach dotyczących powstawania chaosu i dziwnych atraktorów, ewolucji populacji, procesów falowych w reakcjach chemicznych i in..

W referacie przedstawimy nowe wyniki dotyczące pewnych klas UK, których rozwiązywanie sprowadza się do całkowania układów liniowych równań różniczkowych.

Niech $X_1, \dots, X_n$ są wierszami $n \times m$ -macierzy X i niech operator liniowy Π określony jest równością $\Pi(X) = \text{col}(X_1^T, \dots, X_n^T)$, gdzie T jest symbolem transponowania. Iloczyn prosty macierzy $A = (a_{ij})$ i B jest macierzą blokową $A \otimes B = (a_{ij}B)$.

Będziemy rozważali UK postaci

$$(1) \quad x' = d(t) + G(t)x - f(t, x),$$

gdzie $f(t, x) = \text{col}(x^T F_1(t)x, \dots, x^T F_p(t)x)$, funkcja p -wektorowa d i funkcje $p \times p$ -macierzowe $G, F_1, \dots, F_p$ są rzeczywiste określone i ciągłe na pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Zakładamy, że istnieją ciągłe funkcje macierzowe A, B, C wymiaru $m \times m, m \times n$ i $n \times n$ odpowiednio takie, że

$$G = C \otimes E_m - E_n \otimes A^T, \quad \Pi(XBX) = f(t, x),$$

gdzie E_m i E_n są macierze jednostkowe oraz $X = \Pi^{-1}(x)$. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$D = \Pi^{-1}(d), \quad H = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix},$$

gdzie Φ jest unormowaną dla $t = t_0$ macierzą fundamentalną układu liniowego $\dot{z} = Hz$, w której podział na bloki jest taki sam jak w macierzy H .

Twierdzenie. Jeśli spełnione są powyższe założenia, to rozwiązanie UK(1), spełniające warunek początkowy $x(t_0) = q, q \in \mathbb{R}^p$ dane jest wzorem $x = \Pi(X)$, gdzie

$$X = (\Phi_{21} + \Phi_{22}Q)(\Phi_{11} + \Phi_{12}Q)^{-1}, \quad Q = \Pi^{-1}(q).$$

Omówimy również problem istnienia i budowania rozwiązań stałych i okresowych. Wyniki zastosujemy do badania własności asymptotycznych rozwiązań układów Lotki - Volterry, w szczególności uogólnimy zasadę eliminacji konkurencyjnej, dobrze znanej w przypadku układu dwóch równań Lotki - Volterry.